Le déterminant

Définition

Soit $A \in M_{n\times n}$ (carrée). Alors le **déterminant de** A est le nombre réel

- $n = 2$: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- $n = 3$: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$
  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}$
- $n \geqslant 3$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

  où A_{ij} est la matrice A sans sa i−ème ligne et sa j−ème colonne.

Le déterminant

Le déterminant se calcule en “développant” une ligne ou colonne de A et en appliquant la **règle de la matrice des signes**

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}, \dots$$

Nous avons pu observer dans les exemples que le déterminant est facile à calculer si...

- une matrice est **triangulaire** (produits des coefficients de la diagonale)
- une ligne ou une colonne est pleine de zéros (déterminant nul).

Déterminant des matrices élémentaires

1. $L_i \leftrightarrow L_j$ (permutation des lignes) $\det(E_I) = -1$

   Permuter deux lignes ou colonnes **change le signe du déterminant**

2. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (mutiplication d'une ligne par un scalaire) $\det(E_{II}) = \lambda$

   Multiplier une ligne ou colonne par un scalaire **multiplie aussi le déterminant par le même scalaire**.

3. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (mutiplication d'une ligne par un scalaire) $\det(E_{III}) = 1$

   Additionner à une ligne ou colonne le multiple d'une autre ligne ou colonne **ne change pas le déterminant**.

Propriétés du déterminant

Soient $A, B \in M_{n \times n}$.

1. Si A est **diagonale, triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure**, alors

$$\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} (A)_{ii} = \text{produit des coefficients de la diagonale;}$$

2. $\det(A^T) = \det(A)$;
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
4. A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$. De plus, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$;
5. Si les lignes ou colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det(A) = 0$.